

7. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x, y, z) = 2x - y + z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 1\}$
Definujeme

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) := x^2 + (y+1)^2 + z^2 - 1.$$

Pak $M = [g_1 \leq 0, g_2 \leq 0]$.

Vyšetřeme pomocí Věty 16 funkci f na $\text{Int } M$. Spočtěme proto parciální derivace f a hledejme, kdy jsou na M nulové či neexistující.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= 2 \\ f'_y(x, y, z) &= -1 \\ f'_z(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

Nemáme tedy žádné body podezřelé z lokálních extrémů na $\text{Int } M$.

Vyšetřeme nyní chování f na $H(M)$. Z teorie ke 2. cvičení lze snadno odvodit, že

$$H(M) = ([g_1 = 0] \cap M) \cup ([g_2 = 0] \cap M).$$

Zkoumejme tedy f na $[g_1 = 0] \cap M$ a na $[g_2 = 0] \cap M$ zvlášť.

Platí: $[g_1 = 0] \cap M = [g_1 = 0, g_2 \leq 0]$. Použijeme Větu 24 na množinu $\{x \in G: g_1(x) = 0\}$, kde $G = [g_2 < 0]$, což je dle 2. cvičení otevřená množina. Pak vyšetříme ještě f na $[g_1 = 0 = g_2]$. Podobně bude třeba ještě vyřešit f na $[g_2 = 0, g_1 < 0]$.

$$\nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$$

- $[g_1 = 0, g_2 < 0]$

Vyšetřeme podmínky (I), (II) z Věty 24.

$$\nabla g_1 = 0 \iff 0 = 2x = 2y = 2z \iff [x, y, z] = [0, 0, 0]$$

Počátek ale nesplňuje podmínku, že $g_1 = 0$, tedy odsud žádný podezřelý bod nemáme, neb $[0, 0, 0] \notin [g_1 = 0, g_2 < 0]$.

Soustava $\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0$ společně s $g_1 = 0, g_2 < 0$ dává:

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 2\lambda y &= 0 \\ 1 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + (y+1)^2 + z^2 &< 1 \end{aligned}$$

Z ní plyne, že $2\lambda = \frac{-2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{-1}{z}$ (zřejmě nelze, aby jakákoli z proměnných λ, x, y, z byla nulová). Pak platí

$$\begin{aligned} -2y &= x \\ -z &= y \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + (y+1)^2 + z^2 &< 1 \end{aligned}$$

Pak dosazením do posledních dvou rovnic dostaneme.

$$\begin{aligned} 4y^2 + y^2 + y^2 = 1 &\implies y^2 = \frac{1}{6} \implies y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 4y^2 + (y+1)^2 + y^2 < 1 &\implies \begin{cases} \frac{5}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{5+1+2\sqrt{6}+6}{6} = \frac{12+2\sqrt{6}}{6} < 1 \\ \frac{5}{6} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{5}{6} + 1 - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{6} = 2 - \frac{2}{\sqrt{6}} < 1 \end{cases} \implies \text{spor} \end{aligned}$$

Odsud tedy bod podezřelý z extrému nedostáváme (zřejmě $\frac{2}{\sqrt{6}} < 1$, tedy ani v druhém případě není splněna podmínka).

- $[g_2 = 0, g_1 < 0]$

$$\nabla g_2 = 0 \iff 0 = 2x = 2(y+1) = 2z \iff [x, y, z] = [0, -1, 0]$$

Bod $[0, -1, 0]$ ale není prvkem množiny $[g_2 = 0, g_1 < 0]$, tedy nejde o podezřelý bod.

Rovnost $\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0$ společně s $g_2 = 0, g_1 < 0$ dává:

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 2\lambda(y+1) &= 0 \\ 1 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &< 1 \\ x^2 + (y+1)^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dostáváme (opět nedává smysl uvažovat $\lambda, x, y+1$ či z nulová):

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \frac{-2}{x} = \frac{1}{y+1} = \frac{-1}{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 &< 1 \\ x^2 + (y+1)^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} -2y - 2 &= x \\ z &= -y - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &< 1 \\ x^2 + (y+1)^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dosazením prvních dvou rovnic do druhých dvou dostaneme:

$$(2+2y)^2 + y^2 + (y+1)^2 < 1$$

$$(2+2y)^2 + (y+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \implies 6y^2 + 12y + 6 = 1$$

Dostáváme, že $y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, tedy $[x, y, z] = \left[\mp \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$. Ten ovšem nevyhovuje podmínce $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Žádné podezřelé body odsud tedy nejsou.

- $[g_1 = 0 = g_2]$

Použijeme Větu 25. Vyšetřeme nejdříve případ, kdy $\nabla g_2 = 0$. To nastává pro bod $[0, -1, 0]$, ten ovšem nesplňuje $g_2(x, y, z) = 0$ a nejde proto o podezřelý bod. Rovnost $\nabla g_1 = k \nabla g_2$ vede na soustavu

$$2x = 2kx$$

$$2y = 2k(y+1)$$

$$2z = 2kz$$

Rozlišme různé hodnoty k :

- $k = 0 \implies [x, y, z] = [0, 0, 0]$, ale $g_1(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, tedy ne podezřelý bod
- $k \neq 0$. Pak máme soustavu

$$2x(1-k) = 0$$

$$2y(1-k) = 2k$$

$$2z(1-k) = 0$$

$\Delta k = 1 \implies 2y \cdot 0 = 2 \cdot 1$, spor, žádný podezřelý bod

$\Delta k \neq 1 \implies x = z = 0, y = \frac{k}{1-k}$. Ověřme, zda $g_1 = 0, g_2 = 0$ v tomto bodě.

$$g_1 \left(0, \frac{k}{1-k}, 0 \right) = 0 \implies \left(\frac{k}{1-k} \right)^2 = 1 \implies k^2 = 1 - 2k + k^2 \implies k = \frac{1}{2}$$

$$g_2 \left(0, \frac{k}{1-k}, 0 \right) = g_2(0, 1, 0) = 2^2 - 1 \neq 0$$

Tedy žádný podezřelý bod.

Odsud žádné podezřelé body nejsou.

Rovnost $\nabla f + \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$ spolu s podmínkami $g_2 = 0 = g_1$ nám dává:

$$2 + 2\alpha x + 2\beta x = 0$$

$$-1 + 2\alpha y + 2\beta(y+1) = 0$$

$$1 + 2\alpha z + 2\beta z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$$

Z posledních dvou rovnic plyne, že $y^2 = (y+1)^2$, tedy $0 = 2y + 1$, tedy $y = -\frac{1}{2}$. Soustava pak vypadá takto:

$$\begin{aligned}
2 + 2\alpha x + 2\beta x &= 0 \implies 2(\alpha + \beta)x = -2 \\
-1 - \alpha + \beta &= 0 \\
1 + 2\alpha z + 2\beta z &= 0 \implies 2(\alpha + \beta)z = -1 \\
x^2 + z^2 &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Z první a třetí rovnice plyne, že $x \neq 0 \neq z$. Můžeme jimi tedy vydělit a dostaneme, že $2(\alpha + \beta) = \frac{-2}{x} = \frac{-1}{z}$, tj. platí: $2z = x$. Po dosazení tohoto faktu platí:

$$\begin{aligned}
2z &= x \\
-1 - \alpha + \beta &= 0 \\
5z^2 &= \frac{3}{4} \implies z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}
\end{aligned}$$

Máme tedy podezřelé body: $\left[\pm \sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} \right]$.

Celkově máme tyto podezřelé body: $\left[\pm \sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \pm \sqrt{\frac{3}{20}} \right]$.

Jelikož M je komp., plyne z Věty 14, že stačí z podezřelých bodů vybrat kde je funkce f největší a nejmenší a dostaneme tak globální extrémy f na M .

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{20}}\right) &= 2\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}} = \frac{1 + \sqrt{15}}{2} \\
f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{20}}\right) &= -2\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}} = \frac{1 - \sqrt{15}}{2}
\end{aligned}$$

Příklad 1 (b) $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-3x^2 - y^2}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

• Int M : Zřejmě Int $M = [x > 0, y > 0]$. Zde použijeme Větu 16.

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= 4xe^{-3x^2 - y^2} + (2x^2 + 3y^2)e^{-3x^2 - y^2}(-6x) = xe^{-3x^2 - y^2}(4 - 12x^2 - 18y^2) \\
f'_y(x, y) &= 6ye^{-3x^2 - y^2} + (2x^2 + 3y^2)e^{-3x^2 - y^2}(-2y) = ye^{-3x^2 - y^2}(6 - 4x^2 - 6y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xe^{-3x^2 - y^2}(4 - 12x^2 - 18y^2) &= 0 \\
ye^{-3x^2 - y^2}(6 - 4x^2 - 6y^2) &= 0
\end{aligned}$$

Jelikož $e^x > 0$ pro libovolné x dostáváme:

$$x(4 - 12x^2 - 18y^2) = 0 \implies x = 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{2 - 9y^2}{6}}$$

$$y(6 - 4x^2 - 6y^2) = 0 \implies y = 0 \vee y = \pm \sqrt{\frac{3 - 2x^2}{3}}$$

Není možné, aby $x = \pm \sqrt{\frac{2 - 9y^2}{6}}$ a zároveň $y = \pm \sqrt{\frac{3 - 2x^2}{3}}$. V kombinaci s požadavkem $[x, y] \in \text{Int } M$ vychází, že odsud nejsou žádné podezřelé body.

- $H(M)$: $H(M) = [x = 0, y > 0] \cup [x > 0, y = 0] \cup [0, 0]$
- $[x = 0, y > 0]$

Zde zkoumáme chování funkce $g(y) = f(0, y)$ na intervalu $(0, \infty)$. Platí: $g(y) = 3y^2 e^{-y^2}$ a

$$g'(y) = 6ye^{-y^2} - 6y^3 e^{-y^2} = e^{-y^2} 6y(1 - y^2).$$

Ze zkoumání toho, kdy je $g' = 0$, nám vychází, že bod podezřelý z lokálního extrému funkce g na $(0, \infty)$ je $y = 1$. Zajímají nás proto krajní body intervalu a $y = 1$. Proto podezřelými body pro zkoumání extrémů f na M jsou $[0, 1]$ a chování g v nekonečnu a nule.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} 3y^2 e^{-y^2} = 0$$

$$g(0) = 0$$

- $[x > 0, y = 0]$

Zde zkoumáme chování funkce $h(x) = f(x, 0) = 2x^2 e^{-3x^2}$ na intervalu $(0, \infty)$. Platí:

$$h'(x) = 4xe^{-3x^2} + 2x^2 e^{-3x^2}(-6x) = e^{-3x^2} (4x - 12x^3) = 4xe^{-3x^2} (1 - 3x^2).$$

Podobně jako v předchozím případě nás zajímají krajní body intervalu $(0, \infty)$ a body, ve kterých je $h' = 0$, tedy $0, \frac{1}{\sqrt{3}}$ a chování h v nekonečnu. Zajímá nás proto pro f bod $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$ a

$$h(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 e^{-3x^2} = 0$$

- Zbylý bod $[0, 0]$ hranice zařadíme mezi podezřelé body.

Celkově máme tyto podezřelé body: $, [0, 0], [0, 1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$ a hodnota 0 může být infimem/supremem.

Vyšetřeme hodnoty f v těchto bodech.

$$f(0, 0) = 0$$

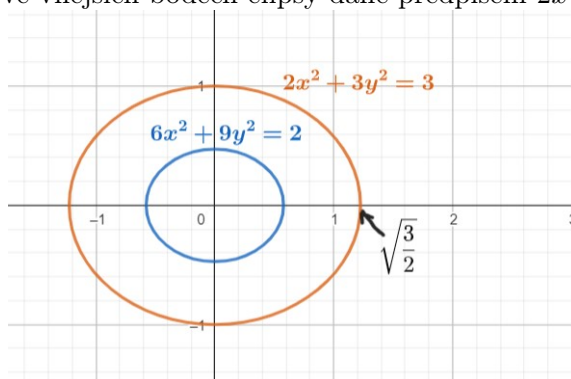
$$f(0, 1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{2}{3} e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3e}$$

Dostáváme kandidáty na maximum: $\frac{3}{e}$ v bodě $[0, 1]$ a na minimum: 0 v bodě $[0, 0]$. Vyšetřeme, zda jde skutečně o maximum a minimum.

Zřejmě $f \geq 0$. Proto 0 je skutečně $\min_M f$. Ukažme ještě, že $\max_M f = \frac{3}{e}$.

Z f'_x, f'_y je vidno: v x -ovém směru funkce f klesá v M ve vnějších elipsy dané předpisem $6x^2 + 9y^2 = 2$ a v y -ovém směru f klesá v M ve vnějších bodech elipsy dané předpisem $2x^2 + 3y^2 = 3$.



Zdefinujme $B := \left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \times [0, 1]$. Pak na množině $M \setminus B$ má f obě parciální derivace záporné, tedy je v x -ovém i y -ovém směru klesající. Z toho plyne, že v libovolném bodě $M \setminus B$ má f menší hodnotu, než je $\sup_B f$. Zbývá tedy ukázat, že $\frac{3}{e} = \max_B f$.

Z doposud spočteného plyne, že v $\text{Int } B$ nemá f žádný podezřelý bod. Z toho, jak jsme zkoumali f na osách plyne, že uvnitř levé a spodní hrany obdélníku B nejsou žádné podezřelé body. Uvnitř zbylých dvou hran je jediný bod, kde má f nulové parciální derivace - bod $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$. K podezřelým bodům přihodíme vrcholy obdélníku B . Máme tedy tyto podezřelé body: $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right], [0, 0], [0, 1], \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right], \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$. Jelikož je B kompaktní, tak stačí dle Věty 14 jen vybrat nejmenší a největší hodnoty na podezřelých bodech.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) &= \frac{2}{3e} \\ f(0, 0) &= 0 \\ f(0, 1) &= \frac{3}{e} \\ f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) &= \frac{6}{e^{\frac{11}{2}}} \\ f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) &= \frac{3}{e^{\frac{9}{2}}} \end{aligned}$$

Nejvyšší hodnotou je skutečně $\frac{3}{e}$, tedy $\max_B f = \frac{3}{e}$, což byla poslední věc, kterou jsme potřebovali ověřit.

Příklad 1 (c) $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x + y + z \geq 0\}$

Množina M je zřejmě kompaktní (dle teorie 2. cvičení). Dle Věty 14 stačí nalézt podezřelé body f na M a z nich pak vybrat ty, kde je f největší a nejmenší. Zkoumejme f na $\text{Int } M$ a na $H(M)$.

Definujme:

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z.$$

Platí $H(M) = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_1 = 0 = g_2] \cup [g_1 < 0, g_2 = 0]$.

• $\text{Int } M = [x^2 + y^2 + z^2 < 4, x + y + z > 0]$: použijeme Větu 16

$$\begin{aligned}f'_x(x, y, z) &= 2 \\f'_y(x, y, z) &= 1 \\f'_z(x, y, z) &= 3\end{aligned}$$

Všechny parciální derivace existují v každém bodě $\text{Int } M$ a nejsou nulové. Nemáme tedy žádné podezřelé body.

• $[g_1 = 0, g_2 > 0]$: použijeme Větu 24

$$\begin{aligned}(g_1)'_x(x, y, z) &= 2x \\(g_1)'_y(x, y, z) &= 2y \\(g_1)'_z(x, y, z) &= 2z\end{aligned}$$

Podmínka (I) je splněna pouze pro počátek, který však není ve zkoumané množině $[g_1 = 0, g_2 > 0]$. Odsud tedy není žádný podezřelý bod.

Podmínka (II): $\nabla f + \lambda g_1 = 0, g_1 = 0, g_2 > 0$ dává:

$$\begin{aligned}2 + 2\lambda x &= 0 \implies 2\lambda x = -2 \\1 + 2\lambda y &= 0 \implies 2\lambda y = -1 \\3 + 2\lambda z &= 0 \implies 2\lambda z = -3 \\x + y + z &> 0 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 4\end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic speciálně plyne, že λ, x, y, z jsou nenulová. Můžeme jimi tedy beztestně dělit, čímž dostaneme: $-2\lambda = \frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{3}{z} \implies x = 2y, z = 3y$. Dosazením do poslední rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned}(2y)^2 + y^2 + (3y)^2 &= 4 \\4y^2 + y^2 + 9y^2 &= 4 \\14y^2 &= 4 \\y^2 &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Podmínka $x + y + z > 0$ nám dává jediný podezřelý bod: $\left[2\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right]$

• $[g_1 < 0, g_2 = 0]$: použijeme Větu 24

$$\begin{aligned}(g_2)'_x(x, y, z) &= 1 \\(g_2)'_y(x, y, z) &= 1 \\(g_2)'_z(x, y, z) &= 1\end{aligned}$$

Podmínku (I) nelze splnit.

Podmínka (II): $\nabla f + \lambda g_1 = 0, g_2 = 0, g_1 < 0$ dává:

$$2 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2$$

$$1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1$$

$$3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3$$

$$x + y + z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 < 4$$

Soustava zřejmě nemá řešení, nedostáváme žádné podezřelé body.

• $[g_1 = 0 = g_2]$: použijeme Větu 25

Podmínka (I):

$\nabla g_2 = 0$ zřejmě nenastává.

$$\nabla g_1 = k \nabla g_2 \iff k = 2x = 2y = 2z \iff \frac{k}{2} = x = y = z$$

Jelikož chceme, aby $[x, y, z] \in [g_1 = 0 = g_2]$, tak z této podmínky neplyne žádný bod (podmínka $x + y + z = 0$ dává, že jde o počátek, ten však nevyhovuje rovnosti $x^2 + y^2 + z^2 = 4$).

Podmínka (II): $\nabla f + \alpha g_1 + \beta g_2, g_1 = 0 = g_2$ dává:

$$2 + 2\alpha x + \beta = 0$$

$$1 + 2\alpha y + \beta = 0$$

$$3 + 2\alpha z + \beta = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Z prvních tří rovností plyne: $-\beta = 2 + 2\alpha x = 1 + 2\alpha y = 3 + 2\alpha z$. Tedy $2\alpha(x - y) = -1$ a $2\alpha(y - z) = 2$. Opět speciálně platí, že $\alpha, x - y, x - z \neq 0$. Dostáváme tedy, že $2\alpha = \frac{-1}{x-y} = \frac{2}{y-z} \implies z - y = 2x - 2y$. Soustavu jsme tímto zredukovali na:

$$z = 2x - y$$

$$x + y + z = 0 \implies x + y + 2x - y = 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Dostáváme, že $x = 0, z = -y$. Dosazením do poslední rovnice dostáváme:

$$0^2 + y^2 + (-y)^2 = 4$$

$$y^2 = 2$$

Máme tedy podezřelé body: $[0, \pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}]$.

Celkově jsou podezřelé body: $\left[2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right], [0, \pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}]$

$$f\left(2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right) = 4\sqrt{\frac{2}{7}} + \sqrt{\frac{2}{7}} + 9\sqrt{\frac{2}{7}} = 14\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$f(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$f(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Maximum: $14\sqrt{\frac{2}{7}}$ v $\left[2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right]$

Minimum: $-2\sqrt{2}$ v $[0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Příklad 1 (d) $f(x, y, z) = y^2 + xz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + z \geq 0\}$

Všimněme si, že M není kompaktní, neb není uzavřená. Zkoumejme proto f na kompaktu $\overline{M}$. Pokud se nám pak např. stane, že f nabývá maxima na $\overline{M} \setminus M$, tak půjde o supremum f na M , kterého se na M nenabývá. (půjde o supremum, jelikož f je spojitá a maxima by se nabývalo na hranici).

Zaveďme si:

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) := x + z$$

Opět budeme f zkoumat na $\text{Int } \overline{M} = [g_1 < 0, g_2 > 0]$ a na $H(\overline{M}) = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_1 = 0 = g_2] \cup [g_1 < 0, g_2 = 0]$.

• $[g_1 < 0, g_2 > 0]$: použijeme Větu 16

$$f'_x(x, y, z) = z$$

$$f'_y(x, y, z) = 2y$$

$$f'_z(x, y, z) = x$$

$\nabla f = 0 \iff x = y = z = 0$. Počátek však není ve zkoumané množině $[g_1 < 0, g_2 > 0]$, tedy žádný podezřelý bod.

• $[g_1 = 0, g_2 > 0]$: použijeme Větu 24

$$(g_1)'_x(x, y, z) = 2x$$

$$(g_1)'_y(x, y, z) = 2y$$

$$(g_1)'_z(x, y, z) = 2z$$

$\nabla g_1 = 0 \iff x = y = z = 0$, což nevyhovuje podmínce $g_1 = 0$.

$\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0, g_1 = 0, g_2 > 0$ dává:

$$z + 2\lambda x = 0 \implies -2\lambda x = z$$

$$2y + 2\lambda y = 0 \implies -2\lambda y = 2y \implies y = 0 \vee \lambda = -1$$

$$x + 2\lambda z = 0 \implies -2\lambda z = x$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + z > 0$$

Pokud by $\lambda = 0$, pak z prvních tří rovnic dostáváme: $x = y = z = 0$, což nesplňuje předposlední podmínku. Předpokládejme tedy, že $\lambda \neq 0$. Pak z první a třetí rovnosti dostáváme, že pokud $x = 0$, pak $z = 0$ a naopak. To ovšem nesplňuje poslední podmínku. BÚNO $x, z \neq 0$. Pak první a třetí rovnice dávají $-2\lambda = \frac{z}{x} = \frac{x}{z} \implies z^2 = x^2 \implies x = \pm z$. Z poslední podmínky pak plyne, že $x = z > 0$. Uvažme nyní dvě situace plynoucí z druhé rovnice. Předpokládejme nejdříve, že $y = 0$. Pak z podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dostáváme: $2z^2 = 1 \implies z = \frac{1}{\sqrt{2}} = x$. Pokud budeme předpokládat, že $\lambda = -1$, tak z první rovnice dostáváme, že $1 = -2\lambda$ (neb $x = z$), tedy $\lambda = -\frac{1}{2}$, což je spor s $\lambda = -1$.

Podezřelý bod: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

• $[g_1 < 0, g_2 = 0]$: použijeme Větu 24

$$(g_2)'_x(x, y, z) = 1$$

$$(g_2)'_y(x, y, z) = 0$$

$$(g_2)'_z(x, y, z) = 1$$

Nelze, aby $\nabla g_2 = 0$.

$\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0, g_1 < 0, g_2 = 0$ dává:

$$z + \lambda = 0 \implies -\lambda = z$$

$$2y = 0 \implies y = 0$$

$$x + \lambda = 0 \implies -\lambda = x$$

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

$$x + z = 0$$

Máme tedy, že $x = z, y = 0$. Z rovnosti $x + z = 0$ pak plyne, že $x = z = y = 0$. To vyhovuje i předposlední podmínce.

Podezřelý bod: $[0, 0, 0]$.

• $[g_1 = 0 = g_2]$: použijeme Větu 25

Zřejmě nenastává $\nabla g_2 = 0$.

$$\nabla g_1 = k \nabla g_2 \iff k = 2x = 2z \wedge y = 0 \iff y = 0 \wedge x = z$$

Společně s podmínkou, že $x + z = 0$ pak dostáváme, že $x = y = z = 0$, což ovšem nesplňuje $g_1 = 0$.

Rovnosti $\nabla f + \alpha g_1 + \beta g_2, g_1 = 0 = g_2$ dávají:

$$z + 2\alpha x + \beta = 0$$

$$2y + 2\alpha y = 0$$

$$x + 2\alpha z + \beta = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + z = 0 \implies x = -z$$

Poslední podmínku dosadíme do předchozích.

$$z - 2\alpha z + \beta = 0 \implies \beta = 2\alpha z - z$$

$$2y + 2\alpha y = 0$$

$$-z + 2\alpha z + \beta = 0 \implies \beta = z - 2\alpha z$$

$$y^2 + 2z^2 = 1$$

Z první a třetí rovnosti plyne: $2\alpha z - z = z - 2\alpha z \implies z - 2\alpha z = 0 \implies z(1 - 2\alpha) = 0$.

Pokud $z = 0$, pak $y = \pm 1$ dle poslední podmínky. Podezřelý bod: $[0, \pm 1, 0]$.

Pokud $\alpha = \frac{1}{2}$, pak druhá podmínka je: $3y = 0$, tedy $y = 0$. Z poslední rovnice pak dostáváme, že $z^2 = \frac{1}{2}$, tedy $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Podezřelý bod: $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Celkově máme podezřelé body: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], [0, 0, 0], [0, \pm 1, 0], \left[\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$f(0, 0, 0) = 0$$

$$f(0, \pm 1, 0) = 1$$

$$f\left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 + \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

Vidíme, že $\max_{\overline{M}} f = 1$ a nabývá se ho v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $\min_{\overline{M}} f = -\frac{1}{2}$ a nabývá se ho v bodech $\left[\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ani jeden z uvedených bodů však není prvkem množiny M . Proto v rámci množiny M jde jen o supremum a infimum f .

Příklad 2 (b) $f(x, y, z) = x^2 + 5z^2 + 2y^2$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (x - z)^2 + y^2 = 4, x - 7y - z + 2 \geq 0\}$

Množina M je omezená, neb $[z + 2, 0, z] \in M$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. Jelikož $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z + 2, 0, z^2) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z + 2)^2 + z^2 = \infty$, tak $\sup_M f = \infty$. Funkce f tedy na M svého suprema nenabývá. Hledáme tedy již jen $\inf_M f$. Stačí tedy z níže nalezených podezřelých bodů vybrat ten, ve kterém je f nejmenší a dokázat o něm, že jde o minimum nebo supremum.

Definujme:

$$g_1(x, y, z) := (x - z)^2 + y^2 - 4, \quad g_2(x, y, z) := x - 7y - z + 2.$$

Pak $M = [g_1 = 0, g_2 \geq 0] = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_1 = 0 = g_2]$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 10z)$$

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2(x - z), 2y, -2(x - z))$$

$$\nabla g_2(x, y, z) = (1, -7, -1)$$

• $[g_1 = 0, g_2 > 0]$: použijeme Větu 24.

$\nabla g_1 = 0 \iff x - z = y = 0$, avšak $[0, 0, 0] \notin [g_1 = 0, g_2 > 0]$. Odsud žádné podezřelé body nejsou.

$$\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 > 0$$

$$2x + 2\lambda(x - z) = 0 \implies 2x = -2\lambda(x - z)$$

$$4y + 2\lambda y = 0 \implies y = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$10z - 2\lambda(x - z) = 0 \implies 10z = 2\lambda(x - z)$$

$$(x - z)^2 + y^2 = 4$$

$$x - 7y - z + 2 > 0$$

Pokud $\lambda = 0$, pak z prvních tří rovnic plyne, že $x = y = z = 0$, což nesplňuje předposlední rovnici.

Předpokládejme, že $\lambda \neq 0$.

Pokud $x = z$, pak z první rovnosti plyne, že $x = 0 = z$. Ze čtvrté rovnosti pak plyne, že $y = \pm 2$, a aby byla splněna poslední rovnost, tak musí $y = -2$. Z toho dostáváme podezřelý bod: $[0, -2, 0]$

Pokud $x \neq z$, pak z první a třetí rovnosti máme, že $\lambda = \frac{-x}{x-z} = \frac{10z}{2(x-z)} \implies x = -5z$. Z druhé rovnosti máme dvě varianty: $y = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{2}$. Pokud by $y = 0$ tak by ze čtvrté rovnosti plynulo, že $(-6z)^2 = 4 \implies z = \pm \frac{1}{3}$. Z poslední podmínky pak plyne bod: $[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}]$. Pokud by naopak $\lambda = -\frac{1}{2}$, tak bychom měli, že $\frac{-1}{2} = \frac{-x}{x-z} \implies x = -z$. V kombinaci s již spočítaným vztahem $x = -5z$, pak dostáváme, že $x = 0 = z$, což je spor s předpokladem, že $x \neq z$.

Máma tedy zatím tyto podezřelé body: $[0, -2, 0], [\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}]$.

• $[g_1 = 0 = g_2]$: použijeme Větu 25

$\nabla g_2 = 0$ zřejmě nenastává

$\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2$ dává soustavu:

$$\begin{aligned} 2(x - z) &= k \\ 2y &= -7k \\ -2(x - z) &= -k \end{aligned}$$

To dává bod $[\frac{k}{2} + z, \frac{-7}{2}k, z]$. Z podmínky $g_2 = 0$ máme, že $k = \frac{2}{25}$, a z $g_1 = 0$ máme: $k = \pm \sqrt{\frac{16}{50}}$. Tyto dvě podmínky jsou neslučitelné, tedy nemám žádný podezřelý bod.

$$\begin{array}{l} \nabla f = \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ \hline 2x + 2\alpha(x - z) + \beta = 0 \\ 4y + 2\alpha y - 7\beta = 0 \\ 10z - 2\alpha(x - z) - \beta = 0 \\ x - 7y - z = -2 \\ (x - z)^2 + y^2 = 4 \end{array}$$

Z první a třetí rovnosti plyne $-\beta = 2x + 2\alpha(x - z) = -10z + 2\alpha(x - z) \implies x = -5z$. Dosazením tohoto do posledních dvou rovnic dostáváme, že $-6z = -2 + 7y, (-6z)^2 + y^2 = 4$. Dosazením první do druhé máme, že $4 = (7y - 2)^2 + y^2 = 49y^2 - 28y + 4 + y^2 = 50y^2 - 28y + 4 \implies 50y^2 - 28y = 0 \implies y = 0 \vee y = \frac{14}{25}$. Dostáváme tedy podezřelé body: $[-\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}], [\frac{8}{5}, \frac{14}{25}, \frac{-8}{25}]$.

Celkově podezřelými body jsou: $[0, -2, 0], [\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}], [-\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}], [\frac{8}{5}, \frac{14}{25}, \frac{-8}{25}]$.

$$\begin{aligned} f\left(\pm \frac{5}{3}, 0, \mp \frac{1}{3}\right) &= \frac{10}{3} \\ f(0, -2, 0) &= 8 \\ f\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{25}, \frac{-8}{25}\right) &= \frac{2312}{625} \end{aligned}$$

Kandidát na minimum: hodnota $\frac{10}{3}$ v bodech $[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}]$. Ukážeme, že jde o minimum.

Mn. $A := [-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}] \times \{0\} \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cap M$ je kompaktní podmnožina množiny M . Navíc zřejmě platí, že $A = \{[z+2, 0, z], [z-2, 0, z] : z \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]\}$. Dále platí, že $f(z+2, 0, z) = 6z^2 + 4z + 4$ a z vyšetření pomocí derivace plyne, že minimum $f(z+2, 0, z)$ na intervalu $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ je $\frac{10}{3}$. Podobně pro $f(z-2, 0, z)$. Máme tedy, že minimum f na A je $\frac{10}{3}$.

Z kladnosti a zápornosti parciálních derivací plyne, že na zbytku množiny M je f větší, než $\frac{10}{3}$ (nebo v příslušných částech $\mathbb{R}^3 \setminus ([-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}] \times \{0\} \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$ má f parciální derivace takové, jaké je má). Z toho tedy již plyne, že $\min_M f = \frac{10}{3}$ a nabývá se ho v bodech $[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}]$.

Příklad 3 (a) Najděte nejkratší vzdálenost bodu $[1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

Vyjádříme vzdálenost bodu $[1, 1, 1]$ od zadané roviny.

$$\min\{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} : 3x + y + z = 2\}.$$

Hledáme tedy minimum funkce $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ na množině $M = \{x \in G : g(x) = 0\}$, kde $g(x, y, z) = 3x + y + z - 2$, $G = \mathbb{R}^3$.

Všimneme si, že odmocnina je minimální, pokud výraz v ní je co nejmenší. Z toho dostáváme, že k nalezení bodu, kde f nabývá minima stačí použít Větu 24 na funkci $\tilde{f} = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ (slouží pouze ke snazšímu výpočtu).

$$\tilde{f}'_x(x, y, z) = 2x - 2$$

$$\tilde{f}'_y(x, y, z) = 2y - 2$$

$$\tilde{f}'_z(x, y, z) = 2z - 2$$

$$g'_x(x, y, z) = 3$$

$$g'_y(x, y, z) = 1$$

$$g'_z(x, y, z) = 1$$

Soustava $\nabla \tilde{f} + \lambda \nabla g = 0$ jest následující soustavou.

$$2x - 2 + 3\lambda = 0$$

$$2y - 2 + \lambda = 0$$

$$2z - 2 + \lambda = 0$$

Její vyřešením dostáváme:

$$y = z$$

$$2y - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

Z rovnosti $3x + y + z = 2$ z definice M a toho, že $y = z$ dostáváme, že $2y - 2 = -3x$. To dosadíme do předchozí rovnice a dostáváme:

$$-3x = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \implies -9x = 2x - 2 \implies -11x = -2 \implies x = \frac{2}{11}$$

Z toho dostáváme, že $y = z = \frac{-3}{2}x + 1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{11} + 1 = \frac{11-3}{11} = \frac{8}{11}$.

Zřejmě funkce $\tilde{f}$ nabývá v bodě $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}]$ minima.

Minimální vzdálenost bodu $[1, 1, 1]$ od zadané roviny je tedy $f\left(\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right) = \sqrt{\left(\frac{9}{11}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$

Příklad 3 (b) Dřevěná bedna tvaru kváдру bez víka má objem $V > 0$. Jaké mají být její rozměry, chceme-li minimalizovat množství dřeva použitého na její výrobu?

Označme hrany podstavy bedny jako a, b a výšku bedny jako c . Povrch bedny bez víka je pak $ab + 2bc + 2ac$. Navíc má platit, že objem dané bedny je číslo V . Tedy musí platit, že $abc = V$. Přičemž, aby šlo skutečně o bednu, je potřeba, aby všechny rozměry byla kladná čísla. Tedy máme ještě podmínku: $a, b, c > 0$.

Matematicky řečeno jde o následující úlohu. Hledáme minimum funkce $f(a, b, c) = ab + 2bc + 2ac$ na množině $M = [abc = V, a, b, c > 0]$.

Použijeme Větu 24. Definujme $g(a, b, c) := abc - V$. Pak $M = \{x \in G: g(x) = 0\}$, kde $G = [a, b, c > 0]$ (což je otevřená množina podle 2. cvičení).

$$\nabla f = (b + 2c, a + 2c, 2b + 2a)$$

$$\nabla g = (bc, ac, ab)$$

Podmínka (I): $\nabla g = 0 \iff 0 = bc = ac = ab$. To nemůže nastat za předpokladu, že $a, b, c > 0$.

Podmínka (II): $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ za podmínky $[a, b, c] \in M$ dává (můžeme dělit, neb předpokládáme, že $a, b, c > 0$):

$$b + 2c + \lambda bc = 0 \implies -\lambda = \frac{b + 2c}{bc}$$

$$a + 2c + \lambda ac = 0 \implies -\lambda = \frac{a + 2c}{ac}$$

$$2a + 2b + \lambda ab = 0 \implies -\lambda = \frac{2a + 2b}{ab}$$

$$abc = V$$

$$a, b, c > 0$$

$$abc + 2ac^2 = abc + 2bc^2 \implies a = b$$

$$2a^2c + 2abc = a^2b + 2abc \implies b = 2c$$

$$abc = V$$

$$ab, b, c > 0$$

$$a = b = 2c$$

$$2c \cdot 2c \cdot c = V \implies 4c^3 = V \implies c = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

Dostáváme tedy podezřelý bod: $a = b = \sqrt[3]{2V}, c = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Lze ukázat, že jde o minimum f na M .

Příklad 3 (c) Určete rozměry kváдру tak, aby součet délek jeho hran byl 96 cm a jeho objem byl co možná největší.

Označíme-li hrany kváдру jako a, b, c , pak chceme, aby $4a + 4b + 4c = 96$ a abc bylo co největší.

Jde tedy o úlohu: $f(a, b, c) = abc, M = [4(a + b + c) = 96, a, b, c > 0] = [a + b + c = 24, a, b, c > 0]$ a hledáme $\max_M f$.

Použijeme Větu 24. Definujme

$$g(a, b, c) := a + b + c - 24.$$

$$f'_a(a, b, c) = bc$$

$$f'_b(a, b, c) = ac$$

$$f'_c(a, b, c) = ab$$

$$g'_a(a, b, c) = 1$$

$$g'_b(a, b, c) = 1$$

$$g'_c(a, b, c) = 1$$

Platí, že $\nabla g \neq 0$. Zbývá tedy vyšetřit druhou podmínku.

Rovnost $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ společně s $[a, b, c] \in M$ dává:

$$bc + \lambda = 0$$

$$ac + \lambda = 0$$

$$ab + \lambda = 0$$

$$a + b + c = 24$$

$$a, b, c > 0$$

Z prvních tří rovnice plyne: $-\lambda = bc = ac = ab$, z čehož plyne: $a = b = c$ (neb $a, b, c \neq 0$).

Dosazením do podmínky $a + b + c = 24$ dostáváme: $3a = 24 \implies a = b = c = 8$.

Lze ukázat, že v tomto bodě má f skutečně maximum vzhledem k M .

Příklad 3 (d) Rozložte kladné číslo na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Označme ono kladné číslo jako A . Chceme, aby $A = a + b + c + d$ a $a, b, c, d > 0$. Zároveň chceme, aby a, b, c, d byla volena tak, že $abcd$ bude co největší.

Definujme:

$$f(a, b, c, d) = abcd, M = [A = a + b + c + d, a, b, c, d > 0], g(a, b, c, d) = a + b + c + d - A.$$

Hledáme $\max_M f$, k čemuž použijeme Větu 24.

$$f'_a(a, b, c, d) = bcd$$

$$f'_b(a, b, c, d) = acd$$

$$f'_c(a, b, c, d) = abd$$

$$f'_d(a, b, c, d) = abc$$

$$g'_a(a, b, c, d) = 1$$

$$g'_b(a, b, c, d) = 1$$

$$g'_c(a, b, c, d) = 1$$

$$g'_d(a, b, c, d) = 1$$

Platí: $\nabla g \neq 0$. Ověřme tedy druhou podmínku.

Rovnost $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ společně s $[a, b, c, d] \in M$ dává:

$$\begin{aligned}
bcd + \lambda &= 0 \\
acd + \lambda &= 0 \\
abd + \lambda &= 0 \\
abc + \lambda &= 0 \\
a + b + c + d &= A \\
a, b, c, d &> 0
\end{aligned}$$

Speciálně platí: $-\lambda = bcd = acd = abd = abc$. Jelikož předpokládáme, že $a, b, c, d \neq$, můžeme jimi dělit, čímž dostaneme: $a = b = c = d$. Z podmínky $A = a + b + c + d$ pak dostáváme, že $a = b = c = d = \frac{A}{4}$.

Příklad 3 (e) Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Protože se nachází u řeky, stačí jej oplotit ze tří stran. Jaké bude zadání úlohy pomocí Lagrangeových multiplikátorů?

Označíme-li stranu u řeky jako a a druhou stranu obdélníku jako b , lze zadání převést na toto: $a, b > 0, a + 2b = 100$ a chceme, aby ab bylo co největší. Zadané úlohy pomocí Lagrangeových multiplikátorů je tedy následující: $f(a, b) = ab, g(a, b) = a + 2b - 100, G = [a, b > 0], M = \{x \in G: g(x) = 0\}$ a hledáme $\max_M f$.